

Computation of the period of a simple pendulum

Number	SP-PE-TR-16-2EA8-8396	Rev.	DRAFT
Date	5-Jul-2016	Author	G. Theler gtheler@cites-gss.com
Document type	Technical Report	Pages	8



This document is licensed under the Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License. Copyright (c) G. Theler

Abstract

This report computes the period of a simple pendulum of length $\ell = 60$ cm, first by employing the linear approximation and then studying how this result changes with the initial amplitude due to non-linear effects. Further investigations about what happens with real physical pendulums instead of the point-mass approximation are included. Finally, the case of the double pendulum is studied, where chaotic behavior appears.

Revision history

Rev.	Date	Author	
DRAFT	5-Jul-2016	G. Theler	Draft previous to the first issue

Contents

1	Péndulo simple	4
1.1	Aproximación lineal	4
1.2	Grandes amplitudes	5
2	Péndulo físico	5
3	Péndulo doble	7

1 Péndulo simple

Dada una masa m suspendida de una cuerda de longitud ℓ en presencia de un campo gravitatorio uniforme y constante de aceleración g se configura un péndulo simple como se ilustra en la figura 1. Se puede demostrar [1] que la ecuación de movimiento según la formulación newtoniana es

$$m\ell \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \cdot \sin \theta \quad (1)$$

donde θ es el ángulo de apartamiento con respecto a la vertical, tomado $\theta > 0$ en el sentido anti-horario.

1.1 Aproximación lineal

La ecuación diferencial (1) puede escribirse como

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \cdot \sin \theta = 0 \quad (2)$$

donde a su vez, para $\theta \ll 1$ se puede aproximar $\sin \theta \approx \theta$ para obtener

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \cdot \theta = 0 \quad (3)$$

cuya solución para condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0$ y $\dot{\theta}(0) = 0$ es

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot \cos \left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} \cdot t \right)$$

de donde el período T resulta

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0.6}{9.806}} = 1.55 \text{ seg} \quad (4)$$

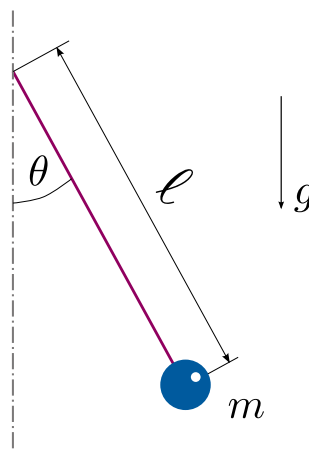


Figure 1: Ilustración conceptual de un péndulo simple

1.2 Grandes amplitudes

El período T dado por la ecuación (4) no involucra ni a la masa m ni a la amplitud inicial θ_0 . La primera no interviene porque el factor m aparece en ambos miembros de la formulación newtoniana dada por la ecuación (1) y se cancela en la ecuación (2). Esto es así debido a que se asume que la masa inercial es proporcional a la masa gravitatoria. Se podría haber llegado a la conclusión de que T no puede depender de m utilizando el teorema II de Buckingham [2]. Sin embargo, el hecho de que el período dado por la ecuación (4) no dependa de θ_0 proviene de aproximar $\sin \theta$ por θ . Para probarlo, consideremos la formulación lagrangiana

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mgl \cdot \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \quad (5)$$

que arroja ecuaciones diferenciales ordinarias en función de derivadas parciales, donde todas ellas pueden ser resueltas numéricamente a través de un programa computacional. En particular, se utiliza el código libre wasora desarrollado por ingenieros de CITES que resuelve las derivadas parciales utilizando la biblioteca GSL y las ecuaciones diferenciales con la biblioteca IDA a partir de un archivo de entrada, que para el caso de la formulación dada por la ecuación (5) puede ser el siguiente:

```
L(theta , thetadot) := 1/2*m*l^2*thetadot^2 + m*g*l*cos(theta)

PHASE_SPACE theta dL_dthetadot
VAR theta' theta_dot'

dL_dthetadot      := derivative(L(theta , theta_dot'), theta_dot', theta_dot)
dL_dthetadot_dot := derivative(L(theta', theta_dot), theta', theta)
```

Realizando cálculos paramétricos, es posible calcular el período T en función de la amplitud inicial θ_0 . En efecto, como se observa en la figura 2, la aproximación lineal predice que el período no depende de θ_0 mientras que la formulación (5) muestra que el período aumenta con la amplitud inicial. La figura 3 muestra el espacio de las fases θ - $\dot{\theta}$. Mientras mayor sea θ_0 , mayor es la diferencia entre la trayectoria no-lineal y las elipses predichas por el modelo simplificado.

2 Péndulo físico

El péndulo simple de la figura 1 es una configuración idealizada de una masa puntual m suspendida a través de un elemento vinculante de masa nula. En cualquier caso práctico, un péndulo físico consiste en un sólido con una cierta distribución no trivial de masa. En este caso, el lagrangiano se modifica incorporando el momento de inercia I con respecto al eje de rotación y la distancia d entre el centro de masa y el eje de rotación:

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgd \cdot \cos \theta$$

Los nuevos parámetros I , m y d pueden ser calculados numéricamente a partir de un modelo tridimensional realizado en un programa libre de diseño mecánico (figura 4) independientemente de la complejidad del péndulo. Este código libre permite acceder mediante un API para el lenguaje Python a las estructuras internas del modelo y, entre otras cosas, calcular numéricamente la masa, la ubicación del centro de masa y el momento de inercia alrededor de cualquier eje. Incluso a partir del sólido computacional es posible fabricar un péndulo real en todo similar al modelado por las ecuaciones diferenciales apropiadas, bien sea generando planos de fabricación o bien directamente mecanizando el modelo tridimensional en un centro de mecanizado o en una impresora 3D.

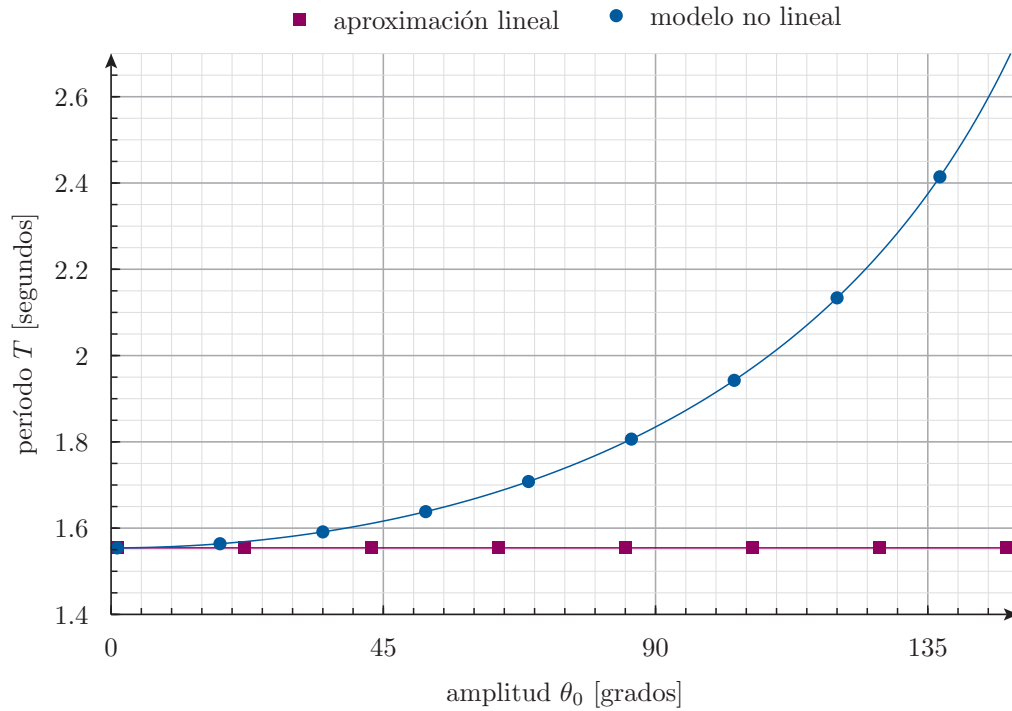


Figure 2: Variación del período T de un péndulo simple de longitud $\ell = 0.6$ m en función de la amplitud inicial calculada resolviendo numéricamente tanto la formulación no-lineal de la ecuación (5) como la aproximación lineal (3) en forma paramétrica sobre θ_0 .

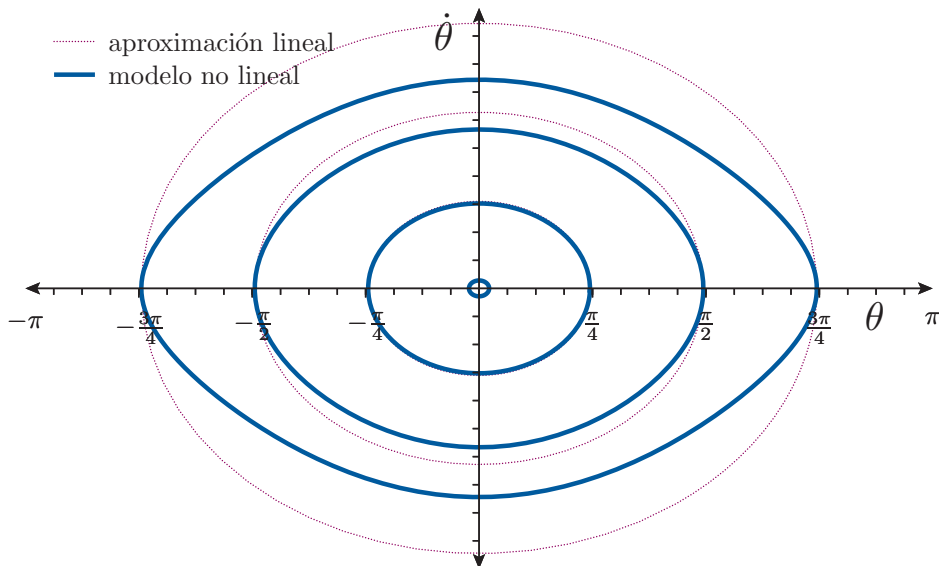


Figure 3: Espacio de las fases $\theta-\dot{\theta}$ de un péndulo simple con $\ell = 0.6$ m para cuatro amplitudes iniciales (5° , 45° , 90° y 135°) comparando el modelo no-lineal y la aproximación $\sin \theta \approx \theta$.

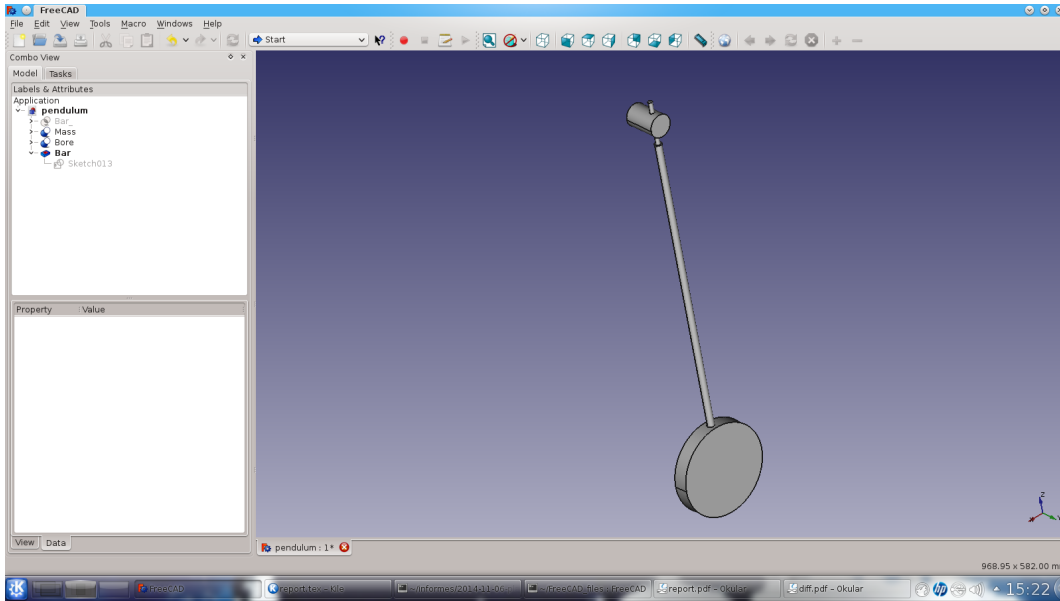


Figure 4: Péndulo físico modelado en un programa libre de diseño mecánico 3D (FreeCAD), a partir del cual se pueden calcular numéricamente parámetros de diseño (masa, ubicación del centro de masa y momento de inercia). Se pueden generar asimismo planos de fabricación para construir el péndulo y ensayarlo experimentalmente.

3 Péndulo doble

Como extensión del péndulo simple, se puede considerar un péndulo doble (figura 5a) en el cual dos masas m_1 y m_2 se suspenden de sendas cuerdas de longitud ℓ_1 y ℓ_2 respectivamente. En este caso, el lagrangiano depende de los ángulos θ_1 y θ_2 y de sus derivadas con respecto al tiempo $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$:

$$\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2}m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \left[\ell_1^2\dot{\theta}_1^2 + \ell_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] + m_1g\ell_1 \cos \theta_1 + m_2g (\ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos \theta_2) \quad (6)$$

Se sabe que para ciertas condiciones iniciales apartadas del equilibrio estable $\theta_1 = \theta_2 = 0$, el péndulo doble presenta un comportamiento caótico. En efecto, la figura 5b muestra la trayectoria de la masa m_2 al ser soltada desde el reposo con una condición inicial $\theta_{10} = \pi/2$ y $\theta_{20} = \pi$, calculada integrando las ecuaciones de movimiento dada por la formulación lagrangiana utilizando la ecuación (6) con el código libre wasora. No sólo se ilustra la naturaleza caótica de la trayectoria en el plano de oscilación (que matemáticamente es una proyección de un atractor extraño en un espacio de dimensión cuatro) sino que se verifica que del código desarrollado no sólo es capaz de resolver ecuaciones sencillas sino que también puede manejar ecuaciones diferenciales no-lineales sin inconvenientes.

References

- [1] Hugh D. Young and Roger A. Freedman. *Sears and Zemansky's University Physics*. Pearson Education, 2013.
- [2] E. Buckingham. "On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations". In: *Physical Review* 4 (1914), pp. 345–376.

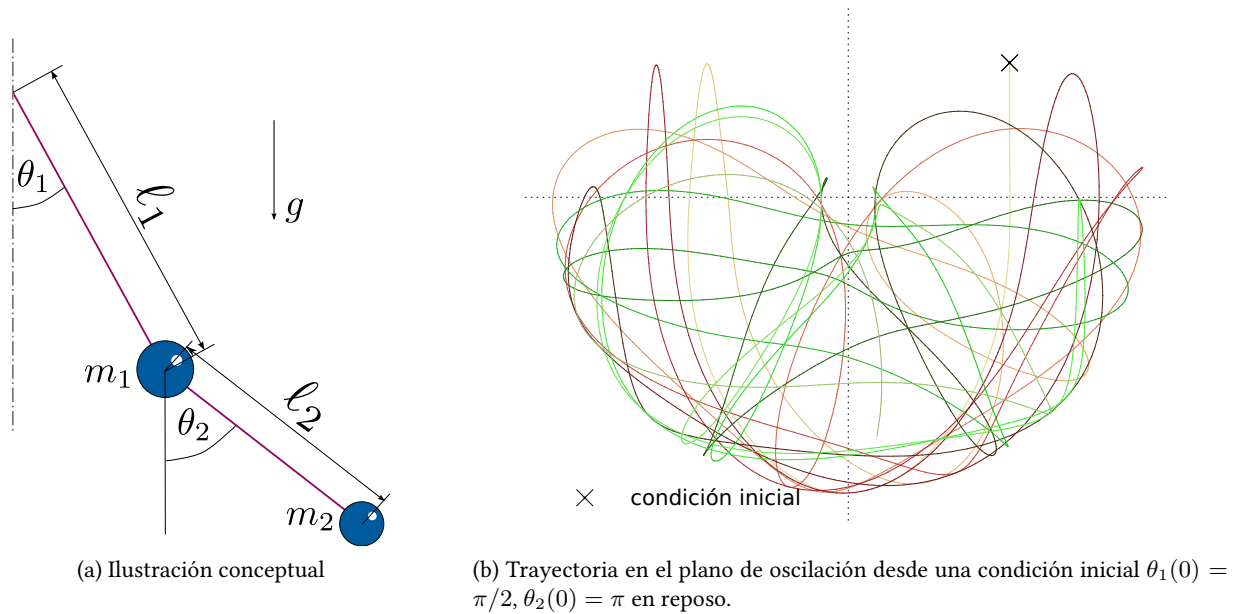


Figure 5: El péndulo doble. Se puede observar la naturaleza caótica del comportamiento para condiciones iniciales apartadas del equilibrio.

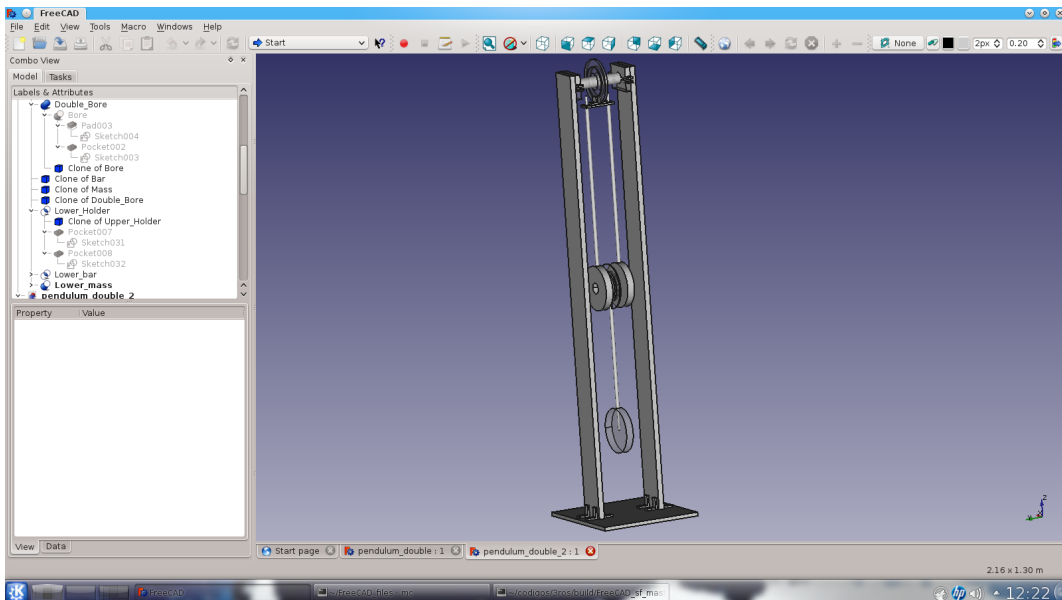


Figure 6: Diseño de un péndulo doble implementado en el programa libre de diseño mecánico 3D FreeCAD que no sólo puede generar planos de fabricación sino que también permite acceder a las propiedades del modelo a través de un API en Python para realizar cálculos tipo multifísica.